

Choix de Portefeuille: Approche de Markowitz et CAPM

Mathieu Rosenbaum

École Polytechnique

Janvier 2021

Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Portefeuilles efficients au sens de Markowitz
- 3 Le Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Introduction

But de ce chapitre

- Trouver les combinaisons de titres les plus intéressantes statistiquement, i.e. meilleure performance pour un niveau de risque donné.
- Performance mesurée par moyenne des rendements, risque par leur variance.
- Cadre moyenne/variance (issue d'une vision gaussienne) de Markowitz (1952).
- Hypothèses discutables mais formules explicites et interprétables facilement.
- Première étape vers le CAPM.

Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Portefeuilles efficients au sens de Markowitz
- 3 Le Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Hypothèses sur le marché

- 2 dates : $t = 0$ (aujourd'hui) et $t = 1$.
- N actifs risqués, 1 actif sans risque (ASR).
- L'ASR vaut 1 à la date 0, et $1 + r$ à la date 1, r connu.
- Prix de l'actif i à la date t : $p_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$.
- Rendement de l'actif i entre $t = 0$ et $t = 1$:

$$r_i = \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} - 1 = y_i - 1.$$

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Hypothèses sur le marché

- $Y = (y_1, \dots, y_N)$.
- On suppose les quantités suivantes bien définies et connues en $t = 0$:

$$\mu = \mathbb{E}[Y] \ (\in \mathbb{R}^N), \quad \Omega = \text{Var}[Y] \ (\in \mathbb{S}_N^{++}).$$

- On suppose par ailleurs pour tout i : $\mu_i > 1 + r$ (espérance de rendement des actifs risqués $>$ rendement de l'ASR).

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Portefeuilles

- On considère un portefeuille de composition : a_0 ASR, a_i unités de chaque actif i .
- Valeur en t : $V_t = a_0 p_t^{ASR} + a' p_t$, avec $a = (a_1, \dots, a_N)'$ et $p_t = (p_{1,t}, \dots, p_{N,t})'$.
- $V_0 = a_0 + a' p_0$,

$$V_1 = a_0(1+r) + \sum_{i=1}^N a_i p_{i,0} y_i = a_0(1+r) + a' \text{diag}(p_0) Y.$$

•

$$\mathbb{E}[V_1] = a_0(1+r) + a' \text{diag}(p_0) \mu$$

$$\text{Var}[V_1] = a' \text{diag}(p_0) \Omega \text{diag}(p_0) a.$$

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Optimisation moyenne/variance

- On considère des portefeuilles de valeur v en $t = 0$:
 $V_0 = V_0(a_0, a) = v$.
- On cherche des portefeuilles d'espérance de rendement maximale pour une variance inférieure à un niveau donné.
- On dira que le portefeuille A domine B si

$$\mathbb{E}[V_1^A] > \mathbb{E}[V_1^B], \quad \text{Var}[V_1^A] \leq \text{Var}[V_1^B].$$

- On appelle frontière efficiente l'ensemble des portefeuilles non dominés.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Optimisation moyenne/variance

- Pour déterminer la frontière efficiente, pour chaque niveau de variance σ^2 , il faut résoudre (E) :

$$\max_{a_0, a} \mathbb{E}[V_1(a_0, a)],$$

$$\text{s.c. } \text{Var}[V_1(a_0, a)] \leq \sigma^2, \quad V_0(a_0, a) = v.$$

- (E) est équivalent à (E') :

$$\max_{a_0, a} \mathbb{E}[V_1(a_0, a)],$$

$$\text{s.c. } \text{Var}[V_1(a_0, a)] = \sigma^2, \quad V_0(a_0, a) = v.$$

- Preuve tableau.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Optimisation moyenne/variance

- Le problème (E') s'écrit :

$$\max_{a_0, a} a_0(1+r) + a' \text{diag}(p_0)\mu,$$

$$\text{s.c. } a' \text{diag}(p_0)\Omega \text{diag}(p_0)a = \sigma^2, \quad a_0 + a'p_0 = v.$$

- Soit $\omega_a = \text{diag}(p_0)a$ le vecteur des compositions en euros du portefeuille en actifs risqués.
- $v = a_0 + \omega'_a e$ avec $e = (1, \dots, 1)'$.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Optimisation moyenne/variance

- Le problème (E') est équivalent à :

$$\max_{\omega_a} (v - \omega'_a e)(1 + r) + \omega'_a \mu,$$

$$\text{s.c. } \omega'_a \Omega \omega_a = \sigma^2.$$

- On note $\tilde{\mu} = \mu - (1 + r)e$.
- Pour résoudre (E') , on cherche les points critiques du lagrangien.
- Preuve tableau.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Optimisation moyenne/variance : Théorème

Pour les portefeuilles de valeur v en $t = 0$, la frontière efficiente est constituée des portefeuilles tels que :

$$a = \frac{1}{\lambda} (\text{diag}(p_0))^{-1} \Omega^{-1} \tilde{\mu}$$

$$a_0 = v - \frac{1}{\lambda} \tilde{\mu}' \Omega^{-1} e, \quad \lambda = \frac{1}{\sigma} (\tilde{\mu}' \Omega^{-1} \tilde{\mu})^{1/2}.$$

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Optimisation moyenne/variance : remarques

- v n'intervient que dans la détermination du nombre d'ASR dans le portefeuille.
- λ est proportionnel à $1/\sigma$: paramètre d'aversion au risque. Plus λ est grand, moins on investit dans les actifs risqués.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Analyse de la frontière efficiente

- Pour un portefeuille efficient on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_1] &= a_0(1+r) + a' \text{diag}(p_0)\mu \\ &= v(1+r) - \frac{1}{\lambda}(1+r)\tilde{\mu}'\Omega^{-1}e + \frac{1}{\lambda}\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\mu \\ &= v(1+r) + \frac{1}{\lambda}\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}.\end{aligned}$$



$$\sqrt{\text{Var}[V_1]} = \sigma = \frac{(\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu})^{1/2}}{\lambda}.$$

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Analyse de la frontière efficiente

- En paramétrisant par λ on obtient :

$$\mathbb{E}[V_1](\lambda) = v(1 + r) + \sqrt{\text{Var}[V_1](\lambda)}(\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu})^{1/2}.$$

- Dans le plan (écart-type/espérance), la frontière efficiente (au sens des couples (écart-type/espérance) efficients) est une droite.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Analyse de la frontière efficiente : Séparation en deux fonds

- Tout portefeuille efficient peut se mettre sous la forme :

$$P = \alpha_0(\lambda)P_0 + \alpha^*(\lambda)P^*$$

avec $P_0 = \text{ASR}$, $P^* = (\text{diag}(p_0))^{-1} \Omega^{-1} \tilde{\mu}$ et

$$\alpha_0(\lambda) = v - \frac{1}{\lambda} \tilde{\mu}' \Omega^{-1} e, \quad \alpha^*(\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

- Tout portefeuille efficient s'écrit comme combinaison linéaire de deux portefeuilles particuliers : P_0 (l'ASR) et P^* , P^* ne contenant que des actifs risqués. C'est le théorème de séparation en deux fonds.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Analyse de la frontière efficiente

- Dans le cas sans ASR, en utilisant la même approche, on montre que la frontière efficiente est une demi hyperbole (cf dessin tableau).
- Supposons $\tilde{\mu}'\Omega^{-1}e > 0$. Notons que pour un v donné, on peut trouver σ tel que $a_0 = 0$.
- Il existe donc un portefeuille proportionnel à P^* efficient en présence d'un ASR.
- Ce portefeuille ne contenant pas d'ASR, il est aussi efficient dans le cas sans ASR. Il appartient donc à la frontière efficiente sans ASR.
- On note $\tilde{P}^*$ ce portefeuille. Tout portefeuille efficient est combinaison de l'ASR et de $\tilde{P}^*$.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Analyse de la frontière efficiente

- Identifions $\tilde{P}^*$.
- $\tilde{P}^*$ est en fait le portefeuille tangent à l'hyperbole à partir de la droite passant par $(0, v(1 + r))$.
- Explications dessin tableau.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Ratio de Sharpe

- Ratio de Sharpe du marché : $S = \sqrt{\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}}$.
- Si Ω est diagonale :

$$\sqrt{\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i - (1+r))^2}{\sigma_i^2} \right)^{1/2}.$$

- Ratio de Sharpe d'un portefeuille (a_0, a) :

$$S(a) = \frac{\mathbb{E}[V_1(a_0, a) - (1+r)]}{\sqrt{\text{Var}[V_1(a_0, a)]}}.$$

- Comme $v = a_0 + \omega'_a e$, $S(a) = \frac{\omega'_a \tilde{\mu}}{(\omega'_a \Omega \omega_a)^{1/2}}$.

Portefeuilles efficients au sens de Markowitz

Ratio de Sharpe : Théorème

- Tous les portefeuilles efficients ont un ratio de Sharpe égal à :

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\tilde{\mu}' \Omega^{-1} \tilde{\mu}}{\sigma} = (\tilde{\mu}' \Omega^{-1} \tilde{\mu})^{1/2} = S.$$

- Soit (a_0, a) un portefeuille : $S(a) \leq S$. Par ailleurs, un portefeuille est efficient ssi son ratio de Sharpe est égal à S .
- Preuve tableau.

Table of contents

- 1 Introduction
- 2 Portefeuilles efficients au sens de Markowitz
- 3 Le Capital Asset Pricing Model (CAPM)

CAPM

Identification du portefeuille P^*

- On ajoute l'hypothèse $\Omega^{-1}\tilde{\mu} > 0$ (poids > 0 pour chaque actif dans P^*).
- Supposons I investisseurs sur le marché, d'aversion au risque respective λ_i , raisonnant tous en Markowitz.
- La demande en actifs risqués de l'agent i s'écrit $a_i = \frac{1}{\lambda_i} (\text{diag}(p_0))^{-1} \Omega^{-1} \tilde{\mu}$.
- Demande totale en actifs risqués :

$$\sum_{i=1}^I \frac{1}{\lambda_i} (\text{diag}(p_0))^{-1} \Omega^{-1} \tilde{\mu} = \frac{1}{\bar{\lambda}} (\text{diag}(p_0))^{-1} \Omega^{-1} \tilde{\mu} = \frac{1}{\bar{\lambda}} P^*$$

$$\text{avec } \bar{\lambda} = \left(\sum_{i=1}^I \frac{1}{\lambda_i} \right)^{-1}.$$

CAPM

Identification du portefeuille P^* : Théorème

- Hypothèse d'équilibre du marché : offre=demande de titres, les prix étant la variable d'ajustement.
- On a donc $\frac{1}{\lambda} P^*$ =ensemble des titres sur le marché.
- P^* est proportionnel au portefeuille de marché, i.e. portefeuille contenant tous les actifs risqués du marché. Par ailleurs, les prix des actifs s'ajustent de façon à obtenir :

$$a^m = \frac{1}{\lambda} (\text{diag}(p_0))^{-1} \Omega^{-1} \tilde{\mu},$$

avec a_i^m le nombre d'actions émises pour l'actif risqué i .

- Si on se restreint au marché français, le portefeuille associé au CAC40 peut-être considéré comme proportionnel au portefeuille de marché.

CAPM

L'équation du CAPM

- On note $z = Y - (1 + r)e$ le vecteur des rentabilités net des actifs risqués.
- Pour un portefeuille, on note pour le vecteur de rentabilité net de sa partie risquée : $z(a) = \frac{a'p_1}{a'p_0} - (1 + r)$

$$z(a) = \frac{a'(\text{diag}(p_0))(z + (1 + r)e)}{a'(\text{diag}(p_0))e} - (1 + r) = \frac{\omega'_a z}{\omega'_a e}.$$

- Pour un portefeuille efficient ω_a^* est proportionnel à $\Omega^{-1}\tilde{\mu}$ donc

$$z(a^*) = \frac{\tilde{\mu}'\Omega^{-1}z}{\tilde{\mu}'\Omega^{-1}e}.$$

CAPM

L'équation du CAPM : Théorème (Sharpe (1964), Lintner (1965))

- On a

$$z = \beta z(a_m^*) + \varepsilon,$$

avec $z \in \mathbb{R}^N$, $\beta \in \mathbb{R}^N$, $z(a_m^*) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$, a_m^* le portefeuille de marché, β le vecteurs des betas i.e. :

$$\beta = \frac{\text{Cov}[z, z(a_m^*)]}{\text{Var}[z(a_m^*)]} \text{ et } \mathbb{E}[\varepsilon] = 0, \text{ Cov}[\varepsilon, z(a_m^*)] = 0.$$

- Pour tout i : $z_i = y_i - (1 + r) = \beta_i z(a_m^*) + \varepsilon_i$ avec

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}[z_i, z(a_m^*)]}{\text{Var}[z(a_m^*)]}.$$

- Preuve tableau.

CAPM

L'équation du CAPM : Corollaire

- On a pour tout i :

$$\mathbb{E}[z_i] = \beta_i \mathbb{E}[z(a_m^*)]$$

$$\text{Var}[z_i] = \beta_i^2 \text{Var}[z(a_m^*)] + \sigma_i^2,$$

$$\text{avec } \sigma_i^2 = \mathbb{E}[\varepsilon_i^2].$$

CAPM

Commentaires sur le CAPM

- Espérance de rendement d'un titre ne dépend que de son beta, pas de son risque total. Elle ne dépend que de son risque systémique (cf suite).
- Dans l'équation de $\text{Var}[z_i] : \beta_i^2 \text{Var}[z(a_m^*)]$ risque systémique, car il dépend de toute l'économie. La composante σ_i^2 est le risque idiosynchratique, propre à l'actif i , décorrélé du reste de l'économie.
- Le risque idiosynchratique est diversifiable, le risque systémique non. En effet, considérons un portefeuille de composition a en actifs risqués.

$$z(a) = \frac{\omega'_a z}{\omega'_a e} = \frac{\omega'_a \beta z(a_m^*)}{\omega'_a e} + \frac{\omega'_a \varepsilon}{\omega'_a e}.$$

CAPM

Commentaires sur le CAPM

- $z(a) = \beta(a)z(a_m^*) + \varepsilon(a)$.
- Le beta d'un portefeuille est la moyenne pondérée des betas des actifs qui le composent. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[z(a)] &= \beta(a)\mathbb{E}[z(a_m^*)] \\ \text{Var}[z(a)] &= \beta^2(a)\text{Var}[z(a_m^*)] + \text{Var}[\varepsilon(a)] \\ &= \beta^2(a)\text{Var}[z(a_m^*)] + \bar{\omega}_a' \text{Var}[\varepsilon] \bar{\omega}_a,\end{aligned}$$

avec $\bar{\omega}_a = \omega_a / (\omega_a' e)$.

- Si on veut réduire le risque du portefeuille, on peut réduire le risque de la première composante en diminuant le β . Mais alors on perd en espérance de rendement. Le risque systémique est non diversifiable et rémunéré.

CAPM

Commentaires sur le CAPM

- En revanche, si on a beaucoup d'actifs différents, le risque idiosynchratique est faible. le risque idiosynchratique est diversifiable et non rémunéré.
- Supposons pour illustrer l'idée $\text{Var}[\varepsilon] = \sigma^2 I_N$ (en fait impossible) et pour tout i : $\bar{\omega}_{a,i} = 1/N$. Alors :

$$\bar{\omega}_a' \text{Var}[\varepsilon] \bar{\omega}_a = \sum_{i=1}^N \bar{\omega}_a^2 \sigma^2 = \sigma^2 / N \rightarrow 0.$$

- Si le nombre d'actifs est grand, le risque idiosynchratique disparaît.

CAPM

Markowitz et CAPM en pratique

- Tableau